

Virtuális találkozásaim Pólya Györggyel

Dr. Vancsó Ödön

ELTE Matematikatanítási és Módszertani Központ

MTA-Rényi-ELTE kutatócsoport vezető

Tatabánya Pólya konferencia 2024. augusztus 28.

Az előadás szerkezete

- Bevezető, személyes élmény
- Pólya György hangja és egy előadásának részletei, személyes levélben Staar Gyula főszerkesztőnek a szerzőtől (Pólya György)
- Analógia, általánosítás specializálás viszonyai
- Egy példa a Pitagórász tétel egy sajátos bizonyítása
- Egy analízisbeli merész analógia (Euler)
- A bolyongás érdekes tétele különbség a 2 illetve 3 dimenzió között

Pólya György kezdő mondatai ahhoz az előadáshoz, melynek kéziratát, maga Pólya György javította. A bemutatott levélben (boríték kivetítve) küldte el Staar Gyulának.

8. június 21.

G. POLYA
2260 DARTMOUTH Street
PALO ALTO
California 94 306 USA

Igen tisztelt Professzor Ur!

Mellékelten küldöm az elmúlt évben Budapesten a Matematikai Kutató Intézetben megtartott előadásának kéziratát. A magnetofonszalagról átirat anyagot Dr.Vincze István professzor úr volt szives átnézni, aki folyóiratunk szerkesztőbizottsági tagja. A javítások tőle származnak. Ő írta azt a meleg hangú bevezetőrészt, amit a cikkkel együtt szeretnénk közzélni.

Arra kérjük Professzor Urat, hogy az esetleges javítások elvégzése után küldje vissza nekünk a kéziratot, hogy azt mielőbb közzélhessük lapunkban. Kérem fogadja el tőlünk az előadáson készült, mellékelt fényképfelvételeket.

Engedje meg, hogy néhány szót ejtsek folyóiratunkról. Lapunk több mint 100 éves múltja tekintetűre, 1869-ben indította Szily Kálmán Természettudományi Közlöny címmel. Célunknak tartjuk, hogy az értelmiségnek színvonalas ismeretterjesztő írásokat közzésszunk. Bízom, hogy az Ön kitűnő előadásának közlése sikert érhet és hasznos célt szolgálunk, ha azt szélesebb körben is megismertetjük. Önt nagyon sokan ismerik és szeretik Magyarországon.

Válaszát várva étovábbi jó egészséget kívánok egész szerkesztőségünk nevében.

Öszinte tisztelettel és szeretettel üdvözlöm

/Staar Gyula/
szerkesztő
/matematika-fizika szakos tanár/

Sender: GEORGE POLYA
Feladó: 2280 DARTMOUTH STREET
PALO ALTO, CALIF. 94306
U.S.A

First Class
AIRMAIL



Természet Világa
(Staar Gyula, szerkesztő)

1085 Budapest
VIII Gyulai Pál utca 14
HUNGARY

Igen tisztelt Szerkesztő Úr!

Köszönettel köszönetem vissza
itt mellékelve a Matematikai
Kutató Intézetben tartott elő-
adásom növeget. A legtöbb
kézzel beírt javítást meg-
tartottam, megtehető sok
további javítást adtam ho-
rrá. Minden korrekciónak
megfelelőleg egy felkiáltó
jel ! van a baloldalon.

A legvégén egy lábjegyzetet
adtam hozzá (12 és 13 old, kéz-
írásban - a szerző részére
talán jó lesz gépiírásban le-
másolni). Remélem, a kor-
rekturák (mind ceruzával)
érthetőek, mindenesetre
egy matematikusnak, a

hi talán majd segít a megoldónak).
En mindenre iparkodtam
érthetően javítani. Szívesen
olvasnám a Kefeleveneztet.

Kérem, tessék átadni
legmelegebb Köszönetemet
Vincze István professor ur-
nak (Vincze Pista barát-
omnak) nagyon kedves
bevezető soraiért és sok fára-
dolásáért a növeggel.

Sok köszönet a jól rite-
rült fényképfelvételekért.

Minden jó kívánsággal
és őszinte tisztelettel

Polya György
(PÓLYA GYÖRGY)

Rendezetlen emlékeim.

Kedves Barátaim! Bocsássák meg, ha itt-ott megakad a nyelvem. Mint hallják, én nem felejtettem el magyarul, de néha előfordul, hogy valamilyen egyszerű szó, vagy komplikált műszó nem jut eszembe.

Előadásom címe: "Rendezetlen emlékeim". Amikor voltak szívesek, és felszólítottak az előadás megtartására, akkor még igazán fogalmam sem volt, miről beszéljek. Kérem, én már nagyon idős vagyok -- majdnem 90 éves -- új matematikát Önöknek már nem mondhatok. Tehát valahol az emlékeim között kellett kutatnom, és azok rendezetlenek. De azóta persze kicsit rendeztem őket. Ami engem mindig is érdekelt, és minél öregebb leszek, annál nagyobb részét veszi érdeklődésemnek az a kérdéskör, hogyan jutunk matematikai felfedezésekhez, hogyan találunk rá egy matematikai feladat megoldására? Ehhez kapcsolódva, két dologról beszélek, amelyeknek tárgyukban egymáshoz semmi köze sincs. ~~az egyik~~

Az egyik: elmondom, hogyan fedezte fel Euler az egyik legismertebb tételét. Gondolom, hallgatóim közül csak kevesen olvasták ~~ezt~~ eredetiben, mert az elejétől ~~a~~ végéig latinul van írva. És az öregebbek ~~azt~~ már elfelejtették a latint, a fiatalabbak pedig sohasem tanulták. Így valószínűleg ~~azt~~ nem olvasták ~~azt~~, és ha az ember ~~azt~~ olvassa, akkor is kell egy kis divináció annak felismeréséhez, hogy Euler hogyan találhatta ki a tételét.

Másodszor ~~a~~ - ha még nem fáradtak - elmondom, én hogyan találtam ki egy tételemet. Kérem, ha nagyon untatom Önöket, tessék nyugodtan félbeszakítani!

Eulernak ~~ez az~~ értekezése az összes művei első széria 26. kötetében jelent meg. ^{W.} Euler, Opera, Ser. I. Vol. 26. /
Látták Euler műveit? Ennyi! Hetvenhat kötet, és ez együtt
több is, mint amit én most mutatok. Euler azzal kezdi, hogy
a síkgeometria és a térgeometria között analógia van; * minden okosabb gimnazista látja, hogy a körhöz hasonlít a gömb, a négyzethez a kocka, egy poligonhoz hasonlít egy poliéder. Igen ám, - mondja Euler - de a térgeometria az sokkal komplikáltabb, és mi sokkal kevesebbet tudunk róla.

Egy kicsit szégyellem, ^{amit most teszek} ~~ezt megmutatni maguknak~~, de amikor én ezt a gyerekeknek mutatom, a következőt mondom: "Lássák, kérem, ez egy síkgeometriai alakzat, egy téglalap. Nagyon egyszerű, de hopp, kocka lett belőle. Ez már sokkal érdekesebb!" Hát bocsássák meg e közbevetést nekem, - ezt csak a kakasülőnek szabadna bemutatnom, - de talán amikor ^{önök} ~~maguk~~ beszélnek a kakasülőhöz, használhatják.

Euler tehát annak a bizonyítására, hogy a térgeometria sokkal kevésbé van kifejlődve, mint a síkgeometria, a következő példát hozza föl: A poligonokat igen egyszerű klasszifikálni. Síkban vagyunk. Amikor poligonokról beszélek, akkor ~~azén~~ egyszerű, zárt poligont értek; ha tetszik, ~~Wann~~ konvexet is, de ez igazán nem szükséges. Egyszerű, zárt poligon. Az micsoda? A legegyszerűbb a háromszög, annak csak három oldala van. Azután jön a négyszög, az ötszög, stb. A poligonokat osztályozhatom egyszerűen az oldalak száma szerint. Ez ^{csak} ~~azonban nem~~ kvalitatív osztályozás! Az oldalak hosszúsága, a szögek nagysága ^{nem jön be} ~~szerinti osztályozás az kvalitatív osztályozás~~. Ilyen kvalitatív osztályozást azonban

En alapoztam meg a bolyongáselemélet problémakörét, és megvallok Önöknek még valamit. Nemrégiben adtak ki egy terjedelmes kötetet ebből a témakörből. Ezt lapozgatva, nekem úgy tetszik, hogy a többi között még mindig az én tételtem a legérdekesebb. ¹⁾

~~Pólya György~~

*Lébjegyzet ¹⁾ a horvátul-
tolt 12 és 13 old. (kézirásban)*

1) Idérendő: Pólya György három dolgorzata ((1) Euler tételevel, (2) és (3) bolyongáselemélettel kapcsolatban):

(1) Guessing and Proving, Two Year College Mathematics Journal, 9 (1978) 21~27.

(2) Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz, Math. Annalen 84 (1921) 149-160.

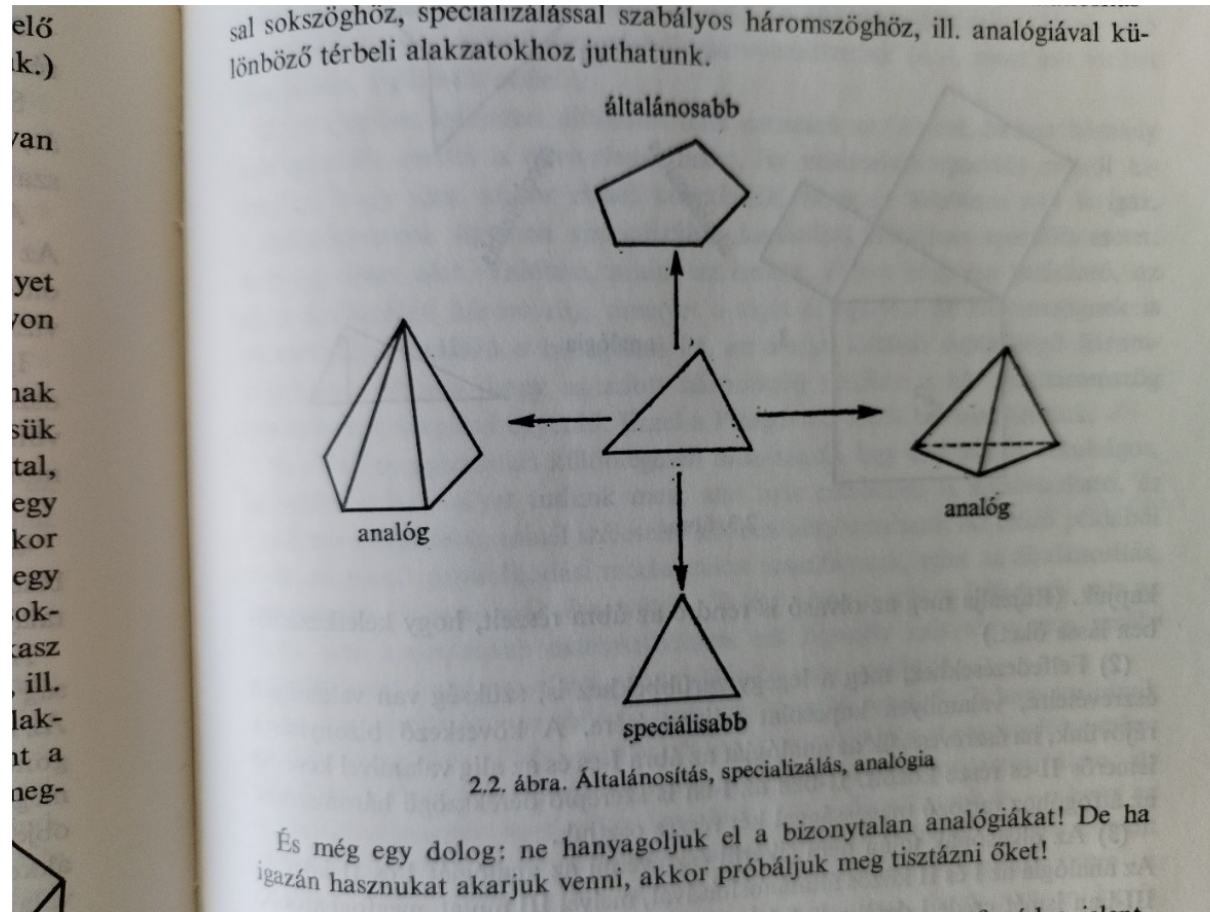
(3) Two Incidents, Scien-
tific

tists at Work: Festschrift in

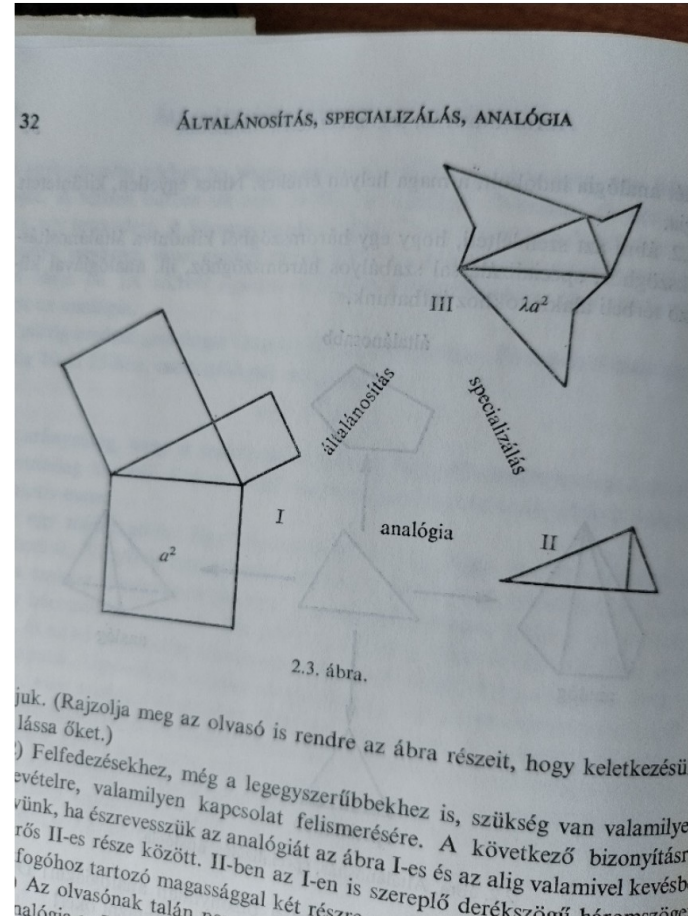
Honour of Herman

Wold, pp. 165-168.

Analógia, specializálás, általánosítás



Püthagorasz tétele bizonyítása egy általánosítás és specializálás segítségével



Egy merész analógia (Euler)

- Jaques Bernoulli kérdése (amire testvérei sem tudtak válaszolni):

Euler ötlete a gyökök és együtthatók közötti összefüggés általánosítása polinomról végtelen sorra (polinomra).

Véges-végtelen sokszor nem analóg (két neves ellenpélda)

Polinom gyökei és együtthatói kapcsolata

Ha egy n -ed fokú polinomnak
 n különböző gyöke van ,
akkor a gyöktényezős alak
= lesz.

Ebből együtthatók összehasonlításával adódnak formulák a gyökök és együtthatók között.

i)

Ennek további változatai, először ha egyik gyök sem 0, ami ekvivalens azzal, hogy nem egyenlő 0-val. Ekkor igaz lesz a következő egyenlőség:

ii))) ...)

iii)

Tisztán páros fokú polinomok esete

Ha csak páros fokú tagok vannak:

a polinom alakja és gyökei: $x^2, x^4, \dots$, legyenek mind különbözőek,
akkor

=

=... és ebből adódik az összefüggés

(1

Euler ötlete

Ezt Euler a $\sin x = 0$ egyenletre alkalmazza, ami végtelen sor alakjában:

- A baloldal végtelen fokú, így nem csoda, hogy végtelen sok gyöke van:
 $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \dots$

Elosztva x -szel elvész a 0, mint gyök és a következő egyenlet adódik:

gyökei pedig: $\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \dots$

Az ötlet alkalmazása a $\sin x$ végtelen sorára

Az analógiát most használva (1) egyenlettel:

= ... azaz

, amiből adódik, hogy

,

És ez Euler válasza Bernoulli kérdésére.

Különböző ellenőrzések a megerősítés végett.

Forrás

- Lásd Pólya György: Indukció és Analógia. Gondolat Kiadó 1988, 34-38. oldal. Eredetileg G. Polya: Induction and analogy in Mathematics című éppen 70 éve megjelent kötetében (1954 majd másodszor 1968 Princeton University Press Vol. I.). Megemlítem még a plauzibilis gondolkodás művészete kötetet is, G. Polya: Patterns of Plausible Inference, amely ugyancsak 70 éves (az első megjelenése 1954 Princeton University Press Vol. II).

Ezek talán kevésbé ismertek, mint a Gondolkodás iskolája vagy a Problémamegoldás iskolája kötetek. Ajánlom főleg középiskolai tanároknak és tehetséggondozással foglalkozóknak. Magyarul először a Gondolat Kiadónál 1988 és 89-ben jelentek meg.

Zárás a végtelen bolyongások a bevezetőből

- Egy végtelen négyzetrácson (két dimenzió) illetve egy kockarácson (három dimenzió) való véletlen bolyongás.
- Jelentése: rácspontokon lépegetünk, és minden szomszédos rácspontra ugyanolyan eséllyel lépünk, s síkon 4 lehetőség $\frac{1}{4}$ - $\frac{1}{4}$ esélyekkel, térben 8 szomszéd $\frac{1}{8}$ esélyekkel lépünk tovább.
- Kérdés: Egy adott pontból egy másik adott pontba milyen eséllyel jutok el?
- Pólya válaszai (1) síkban 1 valószínűséggel mindenholnan mindenhová
- (2) térben kisebb mint $\frac{1}{3}$ esély a válasz a kérdésre.

En alapoztam meg a bolyongáselemélet problémakörét, és megvallok Önöknek még valamit. Nemrégiben adtak ki egy terjedelmes kötetet ebből a témakörből. Ezt lapozgatva, nekem úgy tetszik, hogy a többi között még mindig az én tételtem a legérdekesebb. ¹⁾

~~Pólya György~~

*Lébjegyzet ¹⁾ a horvátul-
tolt 12 és 13 old. (kézírásban)*

Köszönöm a figyelmet!

Elérhetőség:

Vancso.odon@gmail.com