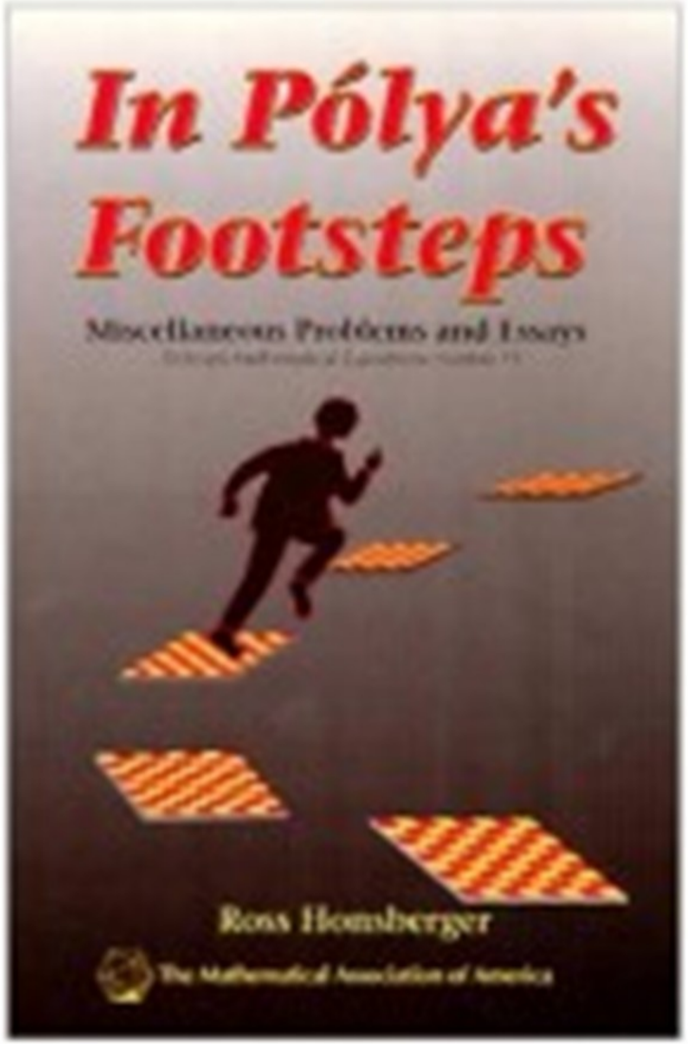
# PÓLYA NYOMDOKAIN

## Négyszögparketta, paralelogramma-tangramm, egyebek

Kosztolányi József

kosztola@math.u-szeged.hu

Pólya György Emlékkonferencia, Tatabánya, 2024. augusztus 28
.


In Pólya's
Footsteps
Miscellaneous Problems and Essays
Ross Honsberger
The Mathematical Association of America

***„Ha felleltem néhány tudományos igazságot (…), ezek mind öt vagy hat alapproblémából következtek vagy származtak, amelyeket sikerült megoldanom, s amelyeket úgy tartok számon, mint megannyi csatát, ahol oldalamra szegődött a hadiszerencse."***

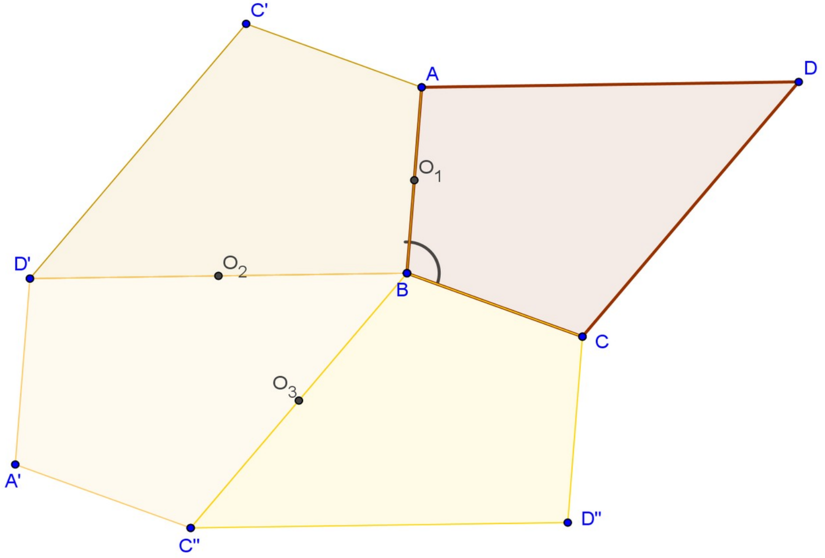
**(René Descartes)**

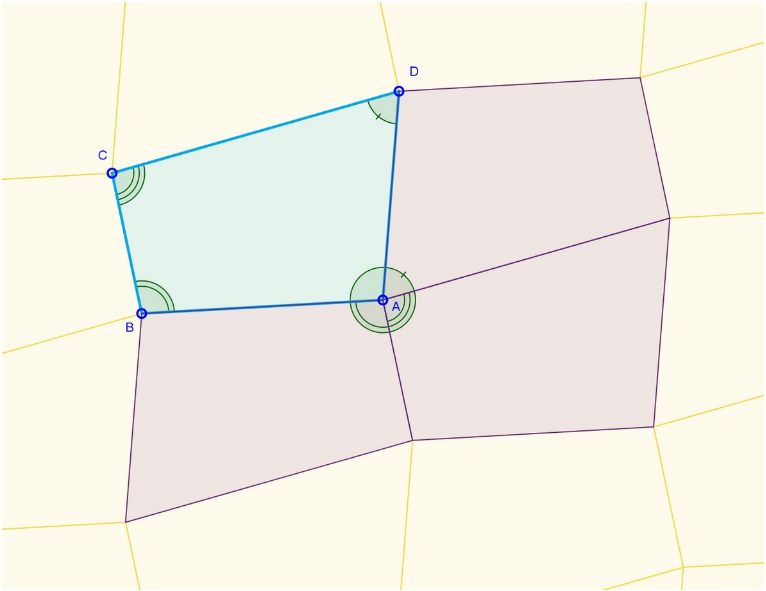
***„A diákokat ismertessük meg a matematikus munkájával olyannyira, amennyire ez egyáltalán lehetséges. Speciálisan, adjunk alkalmat nekik – amennyire csak lehetséges – az önálló alkotómunkára.”***

**(Pólya György)**

**Alapkérdés:** Lefedhető-e a sík egyrétűen és hézagmentesen egybevágó négyszögekkel?

**Megoldás:** Igen, lefedhető. Ennek igazolása végett tükrözzük az *ABCD* négyszöget az *AB* oldal felezőpontjára, majd a kapott *AC'D'B* négyszöget a *BD'* oldal felezőpontjára, végül a kapott *BD'A'C''* négyszöget a *BC''* oldal felezőpontjára. A kapott négy egybevágó négyszög egyrétűen és hézagmentesen lefedi a *B* pont környezetét, és az eljárást tovább folytatva minden csúcs környezete lefedhető a kívánt módon.



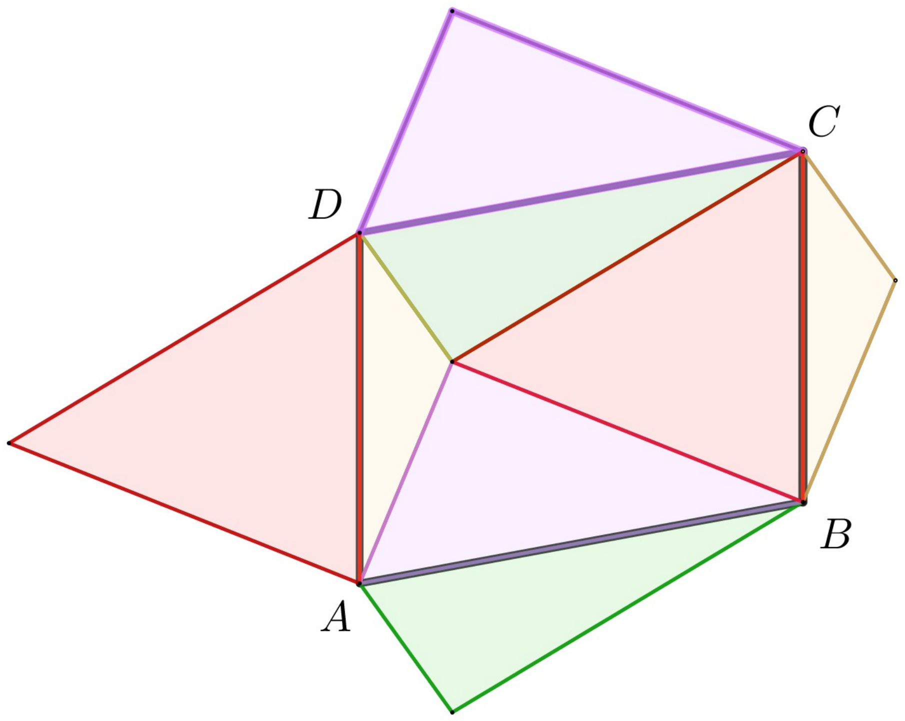




Megjegyzések: 1. Nagyon jól szemléltethető az ábra alapján az a tény, hogy két középpontos tükrözés szorzata eltolás.

2. A lefedés konkáv négyszögekkel is megvalósítható.

**1. feladat:** Tekintsünk két egybevágó konvex négyszöget. Az egyiket vágjuk két részre az egyik, a másikat a másik átlója mentén. Igaz-e, hogy az így kapott négy darab háromszögből paralelogrammát lehet összeállítani? (paralelogramma-tangramm 1)

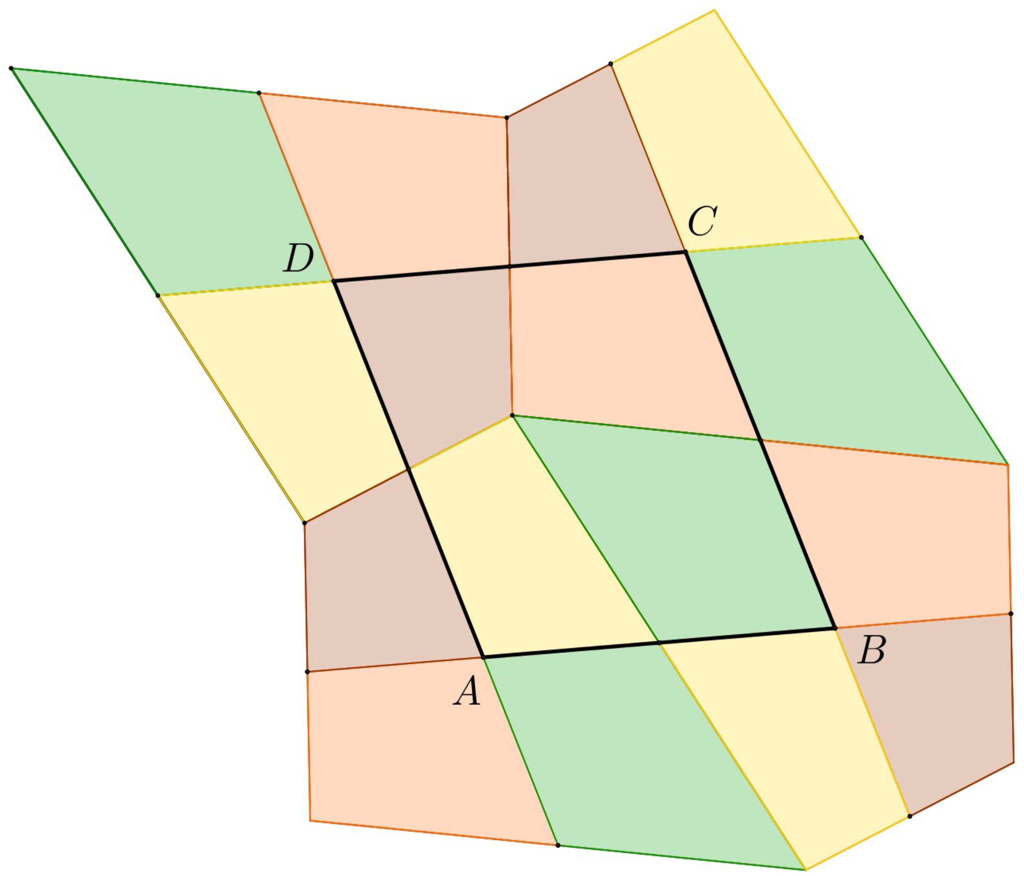
**Megoldás:** Igaz. Mivel a négyszögparketta előállításakor alkalmazott középpontos tükrözés (és az eltolás) az átlókat önmagukkal párhuzamosan mozgatja, ezért az ábrán látható *ABCD* négyszög paralelogramma.




https://www.geogebra.org/m/MzfVn2yx#material/Y51m6gxj

**2. feladat:** Egy konvex négyszöget vágjunk szét a középvonalai mentén. Igaz-e, hogy a kapott négy darab négyszögből paralelogrammát lehet összeállítani? (paralelogramma-tangramm 2)

**Megoldás:** Igaz. A négyszögparketta megfelelő négyszögeinek megfelelő középvonalai párhuzamosak, ezért az *ABCD* négyszög valóban paralelogramma.



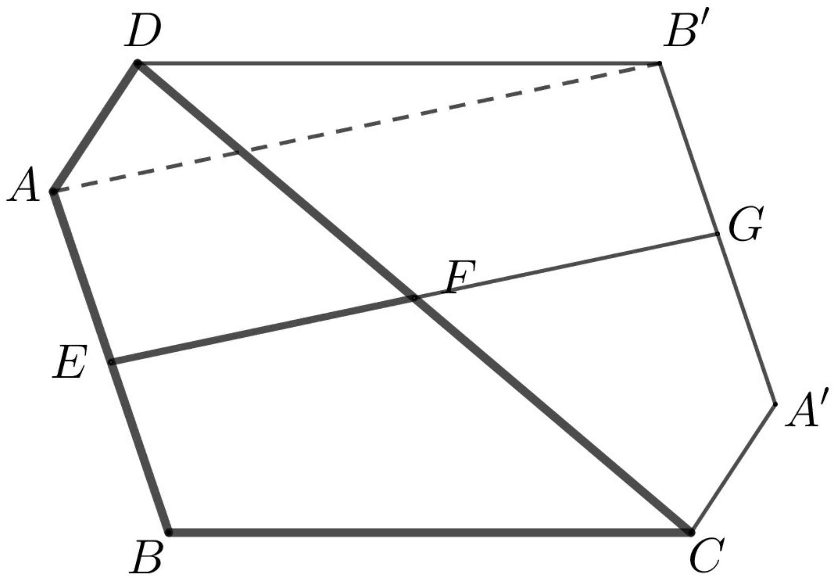

https://www.geogebra.org/m/hwxYEvhd#material/vKM0xwQB

**3. feladat:** Igaz-e, hogy ha egy konvex négyszögben az egyik középvonal egyenlő a végpontjaira nem illeszkedő két oldal számtani közepével, akkor a négyszög trapéz?

**Megoldás:** Igaz. A középpontos tükrözés tulajdonságai alapján , , valamint . Ezek és a háromszö-egyenlőtlenség alapján

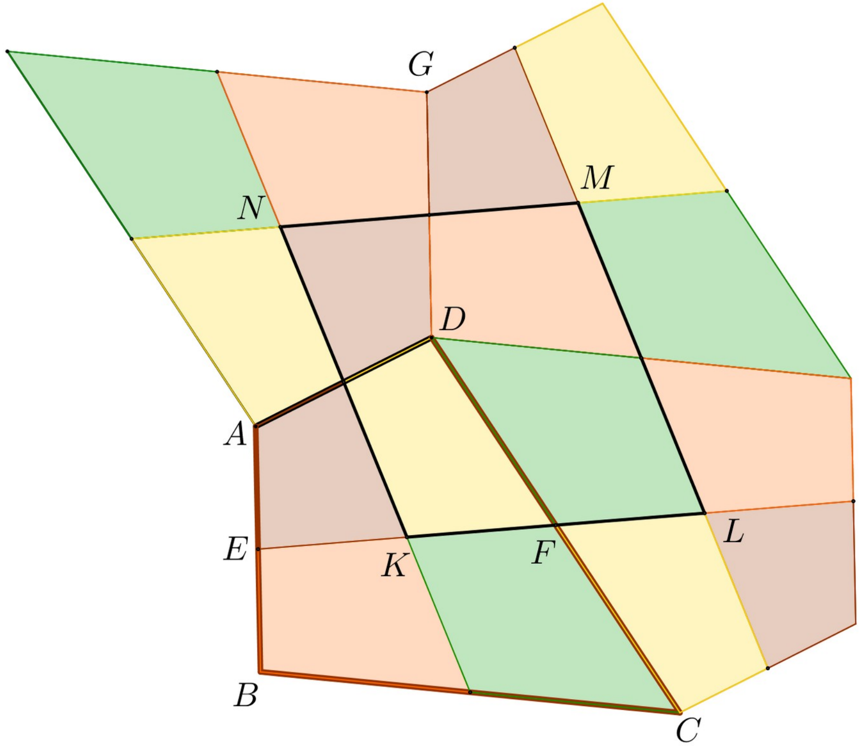
.

Látható, hogy a feladat feltételeinek teljesülése esetén *D* az *AB’* szakasz belső pontja, ami azt jelenti, hogy az *AD* és *BC* oldalak párhuzamosak, azaz az *ABCD* négyszög valóban trapéz.



**4. feladat:** Igaz-e, hogy ha egy négyszög területét egyik középvonala felezi, akkor a négyszög trapéz? Igaz-e, hogy ha mindkét középvonal felezi a négyszög területét, akkor a négyszög paralelogramma?

**Megoldás:** Mindkét kérdésre *igaz* a válasz. A 2. feladatban láttuk, hogy a *KLMN* paralelogramma területe megegyezik az *ABCD* négyszög területével. Ha *EF* felezi az *ABCD* négyszög területét, akkor *D* illeszkedik a *CG* szakaszra, ami azt jelenti, hogy *AB* és *CD* párhuzamosak, azaz az *ABCD* négyszög trapéz. Ha mindkét középvonal felezi a négyszög területét, akkor az *ABCD* négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, vagyis paralelogramma.

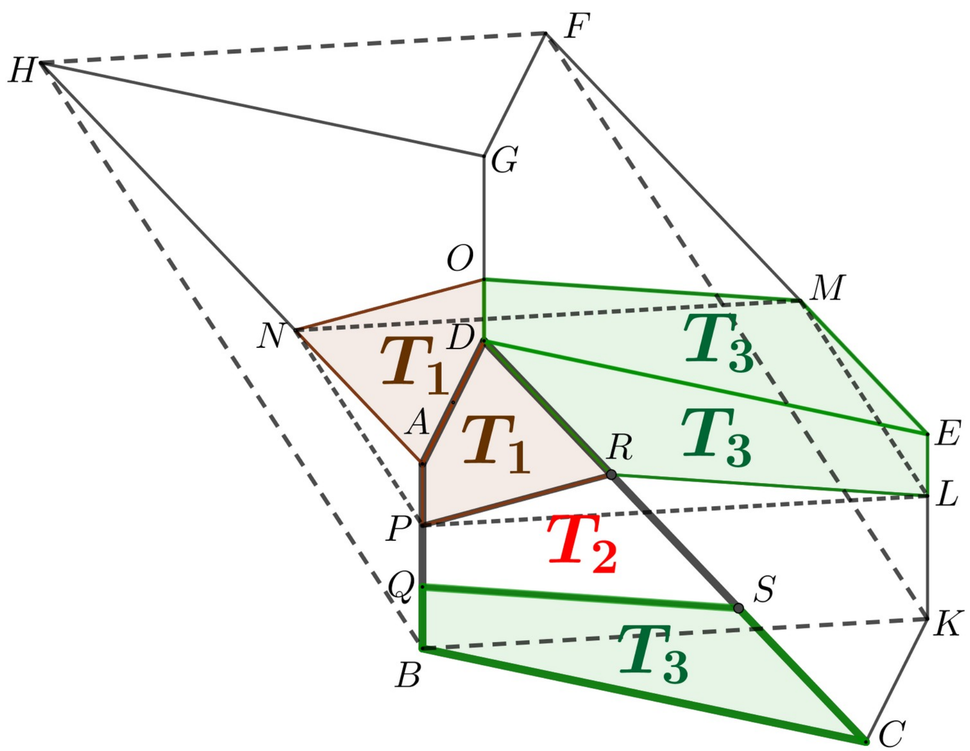


**5. feladat:** Kössük össze egy konvex négyszög két szemközti oldalának harmadoló pontjait. Bizonyítsuk be, hogy a kapott szakaszok által közbezárt terület harmada a négyszög területének.

**Bizonyítás:** Az eddigiek alapján könnyen látható, hogy a *BKFH* és *PLMN* négyszögek paralelogrammák, ahol  és . Így

(1) ;    (2) ;    (3) ;    (4) .

(2), (3) és (4) alapján , azaz , ahonnan .



**További feladatok:**

**1.** Igazoljuk, hogy tetszőleges középpontosan szimmetrikus egybevágó hatszögekkel (konkáv is lehet) a sík lefedhető egyrétűen és hézagmentesen úgy, hogy bármely két hatszög párhuzamos eltolással egymásba vihető.

**2.** Bizonyítsuk be, hogy ha az $ABCD$ négyszög $T$ területére , akkor a négyszög téglalap.

**3.** Mutassuk meg, hogy ha egy konvex négyszög középvonalainak összege egyenlő a négyszög kerületének felével, akkor a négyszög paralelogramma.

**4.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex négyszög középvonalai metszéspontjának a csúcsoktól vett távolságösszege egyenlő a két átló hosszának összegével, akkor a négyszög paralelogramma.

**5.** Egy konvex négyszög egyik átlója nem illeszkedik a középvonalak metszéspontjára, és ezt az átlót a középvonalak úgy osztják három részre, hogy a két szélső egyforma hosszú. Mutassuk meg, hogy a másik átló illeszkedik a középvonalak metszéspontjára.

**6.** Igazoljuk az előző állítás megfordítását: Ha egy konvex négyszög egyik átlója illeszkedik a középvonalak metszéspontjára, a másik átló viszont nem, akkor ez utóbbi átlót a középvonalak három olyan szakaszra osztják, melyekből a két szélső egyenlő hosszú.

***„A gondolkodási készség a matematikatudás értékesebb része. De hogyan taníthatjuk? A diákok csak utánzással és gyakorlással sajátíthatják el. Ha előadjuk valamilyen problémának a megoldását, akkor <u>mutassunk rá a tanulságos lépésekre</u>. Egy lépés akkor tanulságos, ha utánzásra érdemes; vagyis nemcsak a szóban forgó probléma megoldásában hasznos, hanem másban is – minél gyakrabban használható, annál tanulságosabb. (…) Egy jól megmutatott lépéssel a megoldásból kialakíthatunk valamilyen modellt, valamilyen mély benyomást keltő megoldástípust, amelyet utánozva a diákok majd még sok problémát oldanak meg.”***

***„… a feladatmegoldás fontos út a matematikához. Nem ez az egyetlen út, de van csatlakozása más, fontos utakhoz. A tanárnak át kell vennie valódi szépségű és gazdag hátterű feladatokat, még ha nehezebbek és talán időigényesebbek is.”***

**(Pólya György)**